

### 1. Tangent lines

Compute the derivative function of  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  at the points  $x = -1$ ,  $x = 0$  and  $x = 1$ . Explain your result. Find an equation of the tangent line to the graph of  $f$  at each of the three given points.

### 2. Speet / acceleration

An object is thrown vertical upwards. Assuming there is no air friction, the object will travel a distance given by the following equation:

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

where  $v_0$  is the initial velocity (at which the object is thrown),  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  is the gravitational Earth constant, and  $t$  is the time lapsed since the object was thrown.

- Compute the speed and acceleration of the object at any time.
- Suppose the initial speed is 50 km/h, how high will the object get? Compute the speed at the moment of maximum height.
- At what time will the object fall to the ground? With what speed?

### 3. Maximitzacions

A mathematical model for the amount of water in certain lake,  $m(t)$ , in millions of cubic meters, is given as a function of the time  $t$ , measured in years lapsed since the study took place. The formula is the following:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

This formula makes sense only for positive values of the variable  $t$ .

- How much water will there be in the lake when  $t$  goes to infinity?
- Use derivatives to find the time at which the amount of water in the lake is maximum, and compute the amount of water at such time.

### 4. Minimization

A drug has to be given to patients in cylindrical pills. The content of the drug in each pill is 0.15 ml; determine the dimensions of the cylinder so that the amount of material used to make it (the pill) is minimal.

### 5. Analisis

Consider a function  $f(x)$  with

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + 2x - 2}$$

- Determine the regions on which  $f$  is increasing, and those where  $f$  is decreasing.
- Find the extrema points of  $f$ .
- Determine the points on which  $f$  is concave up, and those on which it is concave down.
- Find the values of  $x$  corresponding to the inflection points of the graph of  $f$ .

### 1. Línea tangente

Calcular la derivada de la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  para  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$  e interpretarla. Calcular la recta tangente a  $f$  en cada uno de los puntos anteriores.

### 2. Velocidad y aceleración

El espacio recorrido por un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba, sin tener en cuenta la resistencia del aire, viene dado por la ecuación

$$e(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde  $v_0$  es la velocidad inicial con que se lanza el objeto,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  es la constante gravitatoria de la Tierra y  $t$  es el tiempo transcurrido desde que el objeto se lanza. Se pide:

- Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
- Si el objeto se lanza inicialmente a 50 km/h, ¿cuál será la altura máxima que alcanzará el objeto? ¿Cuál será su velocidad en ese momento?
- ¿En qué instante volverá a tocar la tierra el objeto? ¿Con qué velocidad?

### 3. Maximización

Mediante simulación por ordenador se ha podido cuantificar la cantidad de agua almacenada en un acuífero en función del tiempo,  $m(t)$ , en millones de metros cúbicos, y el tiempo  $t$  en años transcurridos desde el instante en el que se ha hecho la simulación, teniendo en cuenta que la ecuación sólo tiene sentido para los  $t$  mayores que 0:

$$m(t) = 10 + \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

- En el límite, cuando  $t$  tiende a infinito, qué cantidad de agua almacenada habrá en el acuífero?
- Mediante derivadas, calcular el valor del tiempo en el que el agua almacenada ser máxima y cuál es su cantidad de agua correspondiente en millones de metros cúbicos.

### 4. Minimización

Se ha diseñado un envoltorio cilíndrico para unas cápsulas. Si el contenido de las cápsulas debe ser de 0,15 ml, hallar las dimensiones del cilindro para que el material empleado en el envoltorio sea mínimo.

### 5. Análisis

Sea  $f(x)$  una función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + 2x - 2}$$

Se pide:

- Estudiar el crecimiento de  $f$ .
- Calcular los valores de  $x$  en los que  $f$  tiene extremos relativos.
- Estudiar la concavidad de  $f$ .
- Calcular los valores de  $x$  en los que  $f$  tiene puntos de inflexión.